SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Anamarija Zelić

KOMBINATORNA INTERPRETACIJA VERIŽNIH RAZLOMAKA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, srpanj 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Tomislavu Pejkoviću na velikodušnoj pomoći, strpljenju i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.

Hvala od srca mojoj najbližoj rodbini, kumovima, prijateljima i dečku na velikoj podršci tijekom studiranja. Hvala vam što ste me hrabrili, savjetovali i bili uz mene. Svatko od vas ima posebno mjesto u mom srcu.

Najveće hvala mojim roditeljima, sestrama i bratu na bezuvjetnoj ljubavi, molitvama, strpljenju i podršci svih ovih godina. Hvala vam što ste uvijek bili uz mene i što ste vjerovali u mene kada je bilo najteže. Bez vas ovo ne bi bilo moguće. Zato vam od srca posvećujem svoj diplomski rad.

Sadržaj

Uvod

Pojava verižnih razlomaka veže se uz razvoj Euklidovog algoritma, odnosno traženje najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva. Kasnije su se verižni razlomci koristili za rješavanje nekih matematičkih problema, ali samo u konkretnim primjerima, a ne punoj općenitosti. Primjerice, indijski matematičar Aryabhata ih je koristio za rješavanje neodređenih linearnih jednadžbi. Za razvoj verižnih razlomaka veoma je zaslužan John Wallis koji je u 17. stoljeću među prvima započeo proučavanje i generalizaciju teorije verižnih razlomaka. Nakon njega je porastao interes za daljnji razvoj verižnih razlomaka te je u 19. stoljeću teorija verižnih razlomaka znatno napredovala pa se to razdoblje može zvati zlatnim dobom verižnih razlomaka [5].

Područje primjene verižnih razlomaka je zaista veliko. Verižni razlomci se koriste u računalnim algoritmima za racionalne aproksimacije realnih brojeva, za rješavanje linearnih diofantskih jednadžbi, kod kvadratnih iracionalnosti, u kriptografiji itd.

U prvom poglavlju ovog rada ćemo objasniti što su to jednostavni verižni razlomci, koja su njihova svojstva te kako ih možemo kombinatorno protumačiti. Vidjet ćemo kako izgleda popločavanje $n \times 1$ ploče kvadratnim i domino pločicama i na koji način takva popločavanja povezujemo s verižnim razlomcima. Iskazat ćemo nekoliko teorema te dati njihov algebarski i kombinatorni dokaz. Za algebarske dokaze koristimo skriptu [4], a za kombinatorne dokaze knjigu [2]. Također ćemo prikazati razvoj u verižne razlomke nekih razlomaka u kojima se pojavljuju Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi. Koristeći kontinuante pokazat ćemo da se svaki prost broj oblika $4k + 1$ može prikazati kao suma kvadrata dva prirodna broja te da je takav prikaz jedinstven [3].

Drugo poglavlje je posvećeno složenim verižnim razlomcima te su korišteni članci [1] i [6]. Osim same definicije i osnovnih svojstava, prikazat ćemo i njihovu kombinatornu interpretaciju te navesti neke primjere. Prikazat ćemo kombinatorne dokaze nekih teorema analognih onima koji su navedeni kod jednostavnih verižnih razlomaka. Na kraju ćemo reći ponešto o linearnim rekurzijama višeg reda.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Jednostavni verižni razlomci

1.1 Osnovni pojmovi

Za početak ćemo navesti neke osnovne pojmove vezane uz jednostavne verižne razlomke.

Definicija 1.1. *Neka su dani prirodni brojevi* $a_0, a_1, \ldots, a_n$*. Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

nazivamo konačni jednostavni verižni razlomak. Gore navedeni konačni jednostavni verižni razlomak označavamo s $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Primjer 1.2.

$$[2, 3, 5] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = \frac{37}{16}$$

Definicija 1.3. *Neka je zadan beskonačan niz prirodnih brojeva* $(a_i)_{i \geqslant 0}$*. Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

nazivamo beskonačni jednostavni verižni razlomak. Za takav beskonačni jednostavni verižni razlomak koristimo oznaku $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

U ovom radu će se više koristiti konačni verižni razlomci. O pitanju konvergencije beskonačnih verižnih razlomaka reći ćemo nešto više kasnije u radu.

Spomenimo da općenito a_0 iz definicija 1.1 i 1.3 može biti i 0 ili negativan cijeli broj, ali ćemo mi radi kasnije kombinatorne interpretacije tražiti da je i taj broj pozitivan.

Primjer 1.4. *Zanimljiva činjenica jest da verižni razlomak* $[3, 7, 15, 1, 292]$ *i njegov obrat* $[292, 1, 15, 7, 3]$ *imaju isti brojnik. Naime,*

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = \frac{103993}{33102}$$

$$292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}}} = \frac{103993}{355}$$

Računskim postupkom smo se zaista uvjerili da razlomci imaju isti brojnik. Pomoću nove interpretacije verižnih razlomaka vizualno ćemo potvrditi da ova činjenica vrijedi i općenito.

1.2 Kombinatorna interpretacija

Označimo s $(p_i)_{i\geqslant 0}$ i $(q_i)_{i\geqslant 0}$ familije funkcija koje predstavljaju brojnik i nazivnik konačnog jednostavnog verižnog razlomka nakon „sređivanja odozdo prema gore”.

Radi jednostavnosti zapisa u nastavku rada ćemo izostavljati indeks u zapisu funkcija.

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{p_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)}{q_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)} = \frac{p(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)}{q(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)}.$$

Primjer 1.5. *Za verižni razlomak*

$$[2, 3, 5] = \frac{37}{16}$$

vrijedi: $p(2, 3, 5) = 37$ *i* $q(2, 3, 5) = 16$.

S obzirom na to da je $[a] = \frac{a}{1}$, zaključujemo da je $p(a) = a$ i $q(a) = 1$. Za dulje verižne razlomke vrijedi

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} = a_0 + \frac{q_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)}{p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)},$$

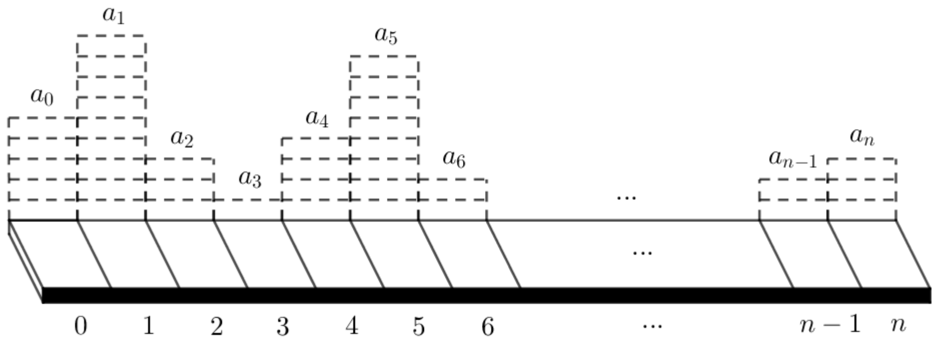
odnosno

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{a_0 p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) + q_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)}{p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n)}.$$

Zaključujemo da je

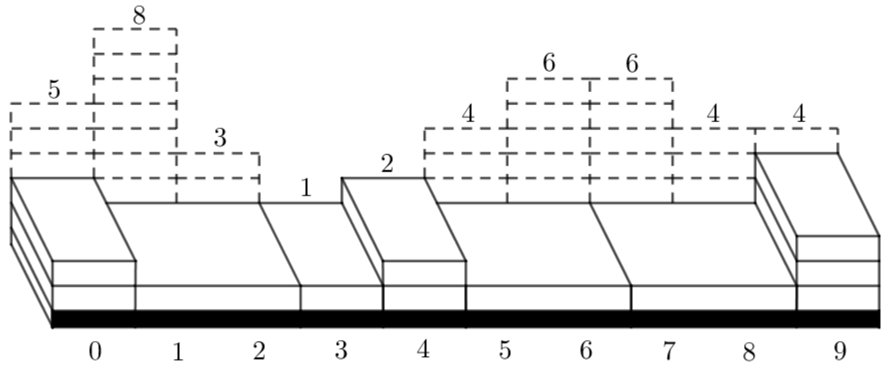
$$\begin{aligned} p_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= a_0 p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) + q_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ q_n(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n) &= p_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sada želimo dobiti neku kombinatornu interpretaciju funkcija p i q. Povežimo verižne razlomke s idejom popločavanja. Popločavanjem $(n+1)$-ploče nazivamo prekrivanje šahovske ploče dimenzija $1 \times (n+1)$ koristeći kvadratne pločice dimenzija 1×1 i domino pločice dimenzija 1×2. Kvadratne pločice se mogu slagati jedna na drugu, ali se ništa ne smije staviti na domino pločicu. Broj kvadratnih pločica koje možemo složiti jedne na drugu u pojedinom polju ovisi o uvjetu visine polja. Uvjet visine a_i označava broj kvadratnih pločica koje možemo naslagati jedne na drugu u i-tom polju. Slika 1.1 prikazuje praznu, tj. nepopločanu $(n + 1)$-ploču s uvjetima visina $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.



Slika 1.1: Prazna $(n + 1)$-ploča

Primjer 1.6. *Prikažimo na slici 1.2 jedno popločavanje 10-ploče s uvjetima visina 5, 8, 3, 1, 2, 4, 6, 6, 4, 4.*



Slika 1.2: Popločavanje 10-ploče

Neka $P(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ označava broj načina za popločavanje $(n + 1)$-ploče s dominama i kvadratnim pločicama koje se mogu naslagati jedna na drugu u skladu s prethodnim pravilima. Definiramo $Q(a_0, a_1, \ldots, a_n) = P(a_1, \ldots, a_n)$. Zaključujemo da $Q(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ označava broj načina za popločavanje n-ploče s uvjetima visina $a_1, \ldots, a_n$. Primjećujemo da nedostaje nulto polje.

Napomena 1.7. *Primijetimo da ploča koja ima samo jedno polje s uvjetom visine a može biti popločana na a načina. Uzimamo da prazna ploča može biti popločana na samo jedan način pa slijedi*

$$P(a) = a$$
$$Q(a) = 1.$$

Pokažimo još da P i Q zadovoljavaju relacije analogne onima u (1.1). Imamo da je $P(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ broj načina za popločavanje $(n+1)$-ploče. Popločavanja možemo podijeliti na ona koja započinju kvadratnom pločicom i ona koja započinju domino pločicom. Prvih popločavanja ima $a_0 P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, a drugih $P(a_2, \ldots, a_n)$. Ukupno imamo

$$\begin{aligned} P(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= a_0 P(a_1, a_2, \ldots, a_n) + P(a_2, \ldots, a_n) \\ &= a_0 P(a_1, a_2, \ldots, a_n) + Q(a_1, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

Uočimo da P i Q zadovoljavaju iste početne uvjete i rekurzivne relacije kao funkcije p i q. Zato je

$$\begin{aligned} p(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= P(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\ q(a_0, a_1, \ldots, a_n) &= Q(a_0, a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Time smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 1.8. *Neka je $a_0, a_1, \ldots$ niz prirodnih brojeva i za $n \geq 0$ pretpostavimo da je iz verižnog razlomka $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ razlomak $\frac{p_n}{q_n}$ dobiven „sređivanjem odozdo prema gore". Tada za $n \geq 0$, p_n predstavlja broj načina za popločavanje $(n+1)$-ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Usto q_n predstavlja broj načina za popločavanje n-ploče s uvjetima visina $a_1, \ldots, a_n$.*

U nastavku rada ćemo najčešće ispustiti indekse kod pisanja p_n i q_n.

Primjer 1.9. *Prikažimo popločavanje početka ploče koja odgovara racionalnoj aproksimaciji broja π.*

$$[3, 7, 15] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

Primijetimo da vrijedi $|\pi - \frac{333}{106}| < 10^{-4}$. Vizualnim prikazom i kombinatornom interpretacijom zaključujemo da početak navedene ploče može biti popločan na 315 ($3 \cdot 7 \cdot 15$) načina ukoliko koristimo samo kvadratne pločice. Također može biti popločan na 3 načina ukoliko nulto polje popločamo kvadratnim pločicama, a iza njega slijedi jedna domino pločica te konačno na 15 načina ukoliko stavimo prvo domino pločicu, a potom u iduće polje stavimo kvadratne pločice. Dakle, broj načina za popločavanje početka ploče je ukupno $315 + 3 + 15 = 333$. Sada uklonimo nulto polje. Dobivamo $[7, 15]$. Tako odabranu ploču možemo popločati na 105 ($7 \cdot 15$) načina koristeći samo kvadratne pločice te na jedan način koristeći domino pločicu. Ukupan broj načina za popločavanje je $105 + 1 = 106$.

Dakle, $p(3, 7, 15) = 333$ i $q(3, 7, 15) = p(7, 15) = 106$.

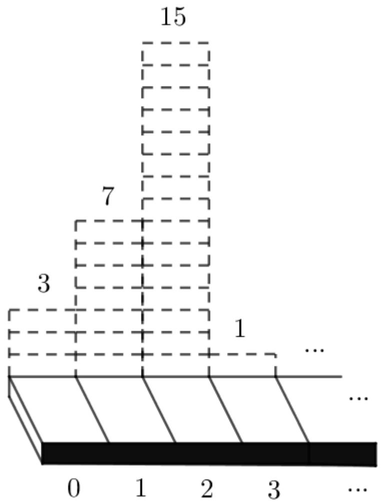
U nastavku ćemo radi jednostavnijeg prikaza popločavanja, crtati samo dvodimenzionalni nacrt.

1.3 Tvrdnje i dokazi

Teorem 1.10. *Neka je $(a_i)_{i \geqslant 0}$ niz prirodnih brojeva. Neka je za $n \geqslant 0$, $[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, gdje je $\frac{p_n}{q_n}$ razlomak dobiven sređivanjem verižnog razlomka. Tada p_n i q_n zadovoljavaju rekurzije*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + 1, & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \end{aligned}$$

za $n \geqslant 2$.



Slika 1.3: Početak ploče koja odgovara racionalnoj aproksimaciji broja π

Dokaz (algebarski). Za $n \in \{0, 1, 2\}$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo sada da je $n > 2$ i da tvrdnja vrijedi za sve indekse od 1 do $n-1$. Definirajmo p'_j, q'_j takve da je

$$\frac{p'_j}{q'_j} = [a_1, a_2, \dots, a_{j+1}].$$

Tada po pretpostavci indukcije vrijedi

$$\begin{aligned} p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}, \\ q'_{n-1} &= a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}. \end{aligned}$$

Također je

$$\frac{p_j}{q_j} = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_j]} = a_0 + \frac{q'_{j-1}}{p'_{j-1}} = \frac{a_0 p'_{j-1} + q'_{j-1}}{p'_{j-1}}$$

te zaključujemo da je

$$\begin{aligned} p_j &= a_0 p'_{j-1} + q'_{j-1} \\ q_j &= p'_{j-1}. \end{aligned}$$

Dakle, vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} p_n &= a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \\ &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}) \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + (a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3}) \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} \\ &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned}$$

□

Sada kombinatorno dokažimo prethodni teorem.

Dokaz (kombinatorno). Vidjeli smo da ploča koja ima samo jedno polje s uvjetom visine a_0 može biti popločana na a_0 načina. Dakle, imamo $p_0 = a_0$. Isto tako znamo da prazna ploča može biti popločana na samo jedan način pa je $q_0 = 1$. Za 2-ploču s uvjetima visina a_0 i a_1 postoji $a_0 a_1 + 1$ načina popločavanja, $a_0 a_1$ načina ukoliko slažemo samo kvadratne pločice te još jedan način ukoliko postavimo jednu domino pločicu. Zato je $p_1 = a_0 a_1 + 1$. S obzirom na to da je $q(a_0, a_1) = p(a_1)$, vrijedi $q_1 = a_1$. Za dokaz tvrdnje $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ za $n \geqslant 2$ stavimo uvjet na zadnje polje u popločavanju $(n + 1)$-ploče. Postoji a_n načina za popločavanje završetka kvadratnom pločicom, a prethodni dio ploče može biti popločan na p_{n-1} načina. Postoji samo jedan način popločavanja završetka domino pločicom, a onda prethodni dio ploče može biti popločan na p_{n-2} načina. Dakle, ukupno imamo $a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ takvih popločavanja. Time smo pokazali da vrijedi

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}.$$

S q_n označavamo broj načina za popločavanje n-ploče kvadratnim i domino pločicama s uvjetima visina polja $a_1, \ldots, a_n$. Također postavimo uvjet na zadnje polje. Postoji a_n načina za popločavanje završetka kvadratnom pločicom, a prethodni dio ploče može biti popločan na q_{n-1} načina. Postoji samo jedan način popločavanja završetka domino pločicom, a onda prethodni dio ploče može biti popločan na q_{n-2} načina. Ukupno imamo $a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ takvih popločavanja. Pokazali smo da vrijedi

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

□

Lako je vidjeti da možemo definirati

$$\begin{aligned} p_{-2} = 0, \quad p_{-1} = 1, \\ q_{-2} = 1, \quad q_{-1} = 0, \end{aligned}$$

tako da rekurzije iz prethodnog teorema vrijede za $n \geqslant 0$.

Pokažimo općenito činjenicu koju smo naslutili u primjeru 1.4.

Teorem 1.11. *Pretpostavimo da je* $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$*. Tada za* $n \geqslant 1$ *imamo*

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Dokaz (algebarski). Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n. Provjerimo vrijedi li navedena tvrdnja za $n = 1$

$$[a_1, a_0] = a_1 + \frac{1}{a_0} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_0} = \frac{p_1}{p_0}.$$

Zaključujemo da vrijedi. Sada pretpostavimo da navedena tvrdnja vrijedi za neki $n \geqslant 1$, odnosno pretpostavimo da za neki $n \geqslant 1$ vrijedi

$$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}.$$

Dokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$. Imamo

$$[a_{n+1}, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = a_{n+1} + \frac{1}{[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]} = a_{n+1} + \frac{1}{\frac{p_n}{p_{n-1}}} = a_{n+1} + \frac{p_{n-1}}{p_n}.$$

Odavde korištenjem teorema 1.10 slijedi

$$a_{n+1} + \frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{p_n} = \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Zaključujemo da tvrdnja teorema vrijedi za sve $n \geqslant 1$. □

Dokaz (kombinatorno). Brojnik od $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$ je broj načina za popločavanje $(n+1)$-ploče kvadratnim i domino pločicama s uvjetima visina $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$.

No, popločavanja $(n + 1)$-ploče s uvjetima visina $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ su u bijekciji s popločavanjima $(n + 1)$-ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ jer ih možemo dobiti rotacijom ploče za 180°. Zaključujemo da je broj takvih popločavanja također p_n.

Na sličan način imamo bijekciju popločavanja n-ploče s uvjetima visina $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ s popločavanjima n-ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pa je nazivnik od $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$ jednak p_{n-1}.

Time smo dokazali početnu tvrdnju. □

Definicija 1.12. *Za konačan ili beskonačan verižni razlomak* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$*, racionalan broj* $r_n = \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ *naziva se* n*-ta konvergenta od* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$.

Dokažimo da je razlika između uzastopnih konvergenti od $[a_0, a_1, \ldots]$

$$r_n - r_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}},$$

odnosno

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Nakon množenja obje strane jednakosti s $q_n q_{n-1}$ dobivamo da je početna tvrdnja ekvivalentna s

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Teorem 1.13. *Za sve $n \geq -1$ vrijedi $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.*

Dokaz (algebarski). Teorem dokažimo indukcijom po n. Za $n = -1$ imamo

$$p_{-1} q_{-2} - p_{-2} q_{-1} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = (-1)^{-2}.$$

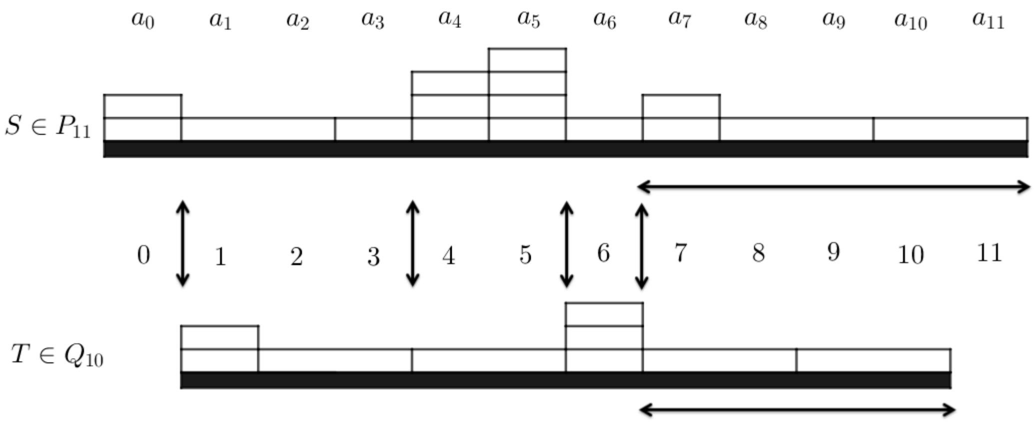
Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za $n - 1$, gdje je n neki nenegativan cijeli broj. Tada prema teoremu 1.10 imamo

$$\begin{aligned}
p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-1} - p_{n-1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= a_n p_{n-1} q_{n-1} + p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} a_n q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\
&= p_{n-2} q_{n-1} - p_{n-1} q_{n-2} \\
&= -(-1)^{n-2} \\
&= (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

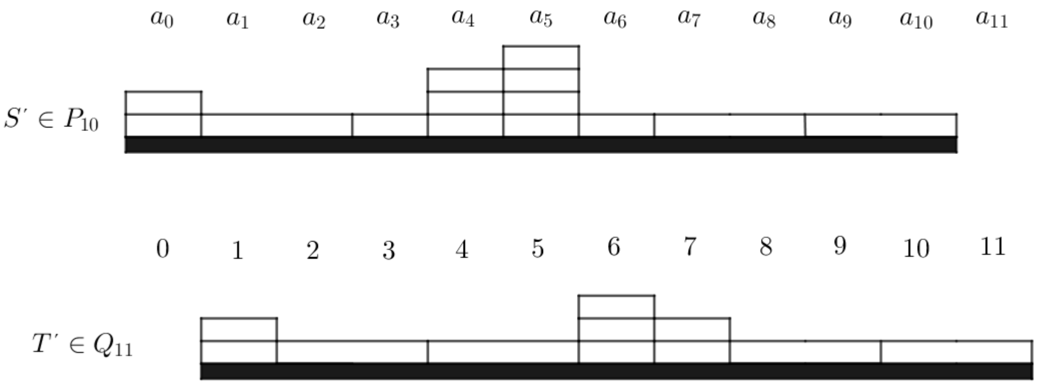
□

Dokaz (kombinatorno). Označimo s $P_n \times Q_{n-1}$ skup svih popločavanja dvije ploče, gdje gornja ploča ima polja $0, 1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, a donja ploča sadrži polja $1, 2, \ldots, n-1$ s uvjetima visina $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Veličina ovog skupa, odnosno ukupan broj mogućih popločavanja jest $p_n q_{n-1}$. Sada promatrajmo skup $P_{n-1} \times Q_n$. Gornja ploča sadrži polja $0, 1, 2, \ldots, n-1$ s uvjetima visina $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, a donja ploča ima polja $1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Veličina ovog skupa, odnosno broj mogućih popločavanja iznosi $p_{n-1} q_n$.

Neka je $(S, T) \in P_n \times Q_{n-1}$ uređeni par koji predstavlja konkretno popločavanje gornje i donje ploče. Za $i \geqslant 1$ kažemo da (S, T) ima lom u i-tom polju ako obje ploče imaju pločicu koja završava u i-tom polju. Kažemo da (S, T) ima lom u polju 0 ako gornja ploča S ima postavljenu kvadratnu pločicu u polju 0. Primjerice, slika 1.4 prikazuje lomove koji postoje u poljima $0, 3, 5$ i 6.



Slika 1.4: Popločavanja S i T s istaknutim lomovima u poljima



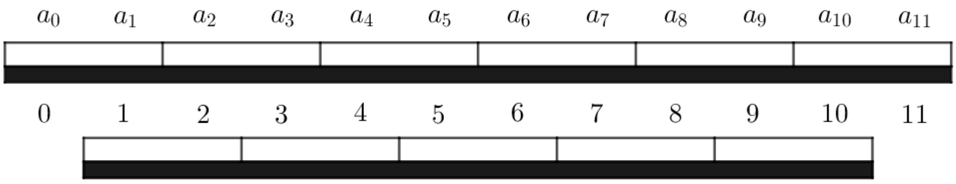
Slika 1.5: Izgled ploča nakon zamjene završetaka

Ukoliko (S, T) ima lom, konstruirajmo (S', T') zamjenjujući dijelove s naslaganim pločicama od S i T nakon zadnjeg mjesta na kojem je lom. Primijetimo da je $(S', T') \in P_{n-1} \times Q_n$. Slika 1.5 prikazuje rezultat nakon zamjene završetaka ploča.

Ukoliko barem jedno od popločavanja, S i T, sadrži kvadratnu pločicu, (S, T) će imati barem jedan lom. Jedini slučaj kada ne postoji lom je kada se S i T sastoje samo od domino pločica raspoređenih na način koji je prikazan na slici 1.6.

Dakle, uspostavili smo bijekciju između popločavanja u $P_n \times Q_{n-1}$ s lomom i popločavanja u $P_{n-1} \times Q_n$ s lomom.

Ukoliko je n neparan broj (ako S i T pokrivaju oba paran broj polja), postoji točno jedan



Slika 1.6: Prikaz popločavanja dviju ploča u kojima nema polja s lomovima

element skupa $P_n \times Q_{n-1}$ bez loma i ne postoji element skupa $P_{n-1} \times Q_n$ bez loma. Označimo s $|P_n \times Q_{n-1}|$ broj elemenata (kardinalni broj) skupa $P_n \times Q_{n-1}$, odnosno s $|P_{n-1} \times Q_n|$ broj elemenata skupa $P_{n-1} \times Q_n$. Kada je n neparan, vrijedi

$$|P_n \times Q_{n-1}| - |P_{n-1} \times Q_n| = 1.$$

Kada je n paran broj, ne postoji element skupa $P_n \times Q_{n-1}$ bez loma i postoji točno jedan element skupa $P_{n-1} \times Q_n$ bez loma. Dakle, kad je n paran, imamo

$$|P_n \times Q_{n-1}| - |P_{n-1} \times Q_n| = -1.$$

Uzimajući u obzir oba slučaja, zaključujemo da je

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

□

Korolar 1.14. *Brojevi p_n i q_n su relativno prosti, odnosno razlomak $\frac{p_n}{q_n}$ je skraćen do kraja.*

Sljedeći teorem pokazuje da parne konvergente rastu, a da se neparne smanjuju.

Teorem 1.15. *Za konvergente vrijedi*

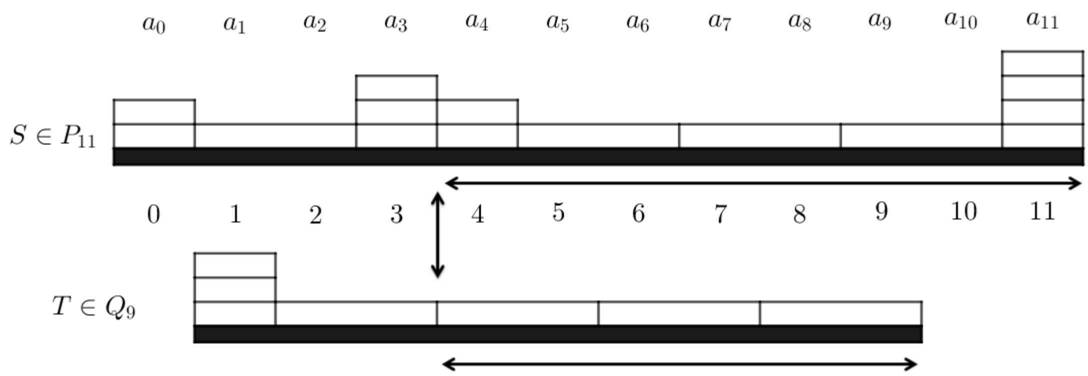
$$\begin{aligned} &1) \quad \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \dots, \\ &2) \quad \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_3}{q_3} > \frac{p_5}{q_5} > \dots, \\ &3) \quad p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \end{aligned}$$

Dokaz (algebarski). Iz teorema 1.10 i 1.13 slijedi

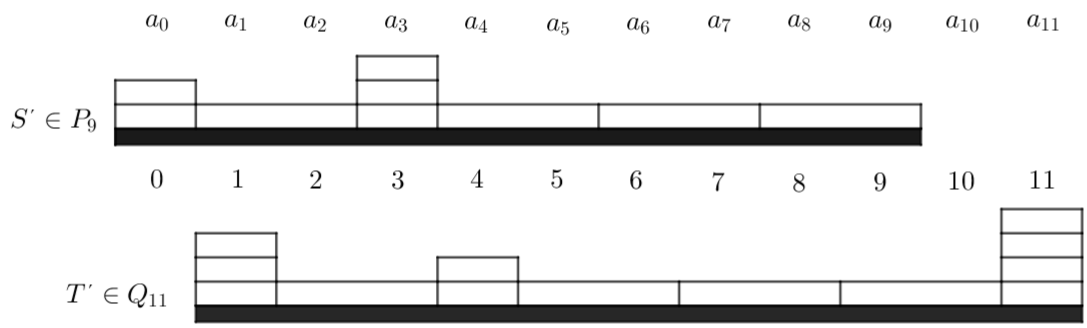
$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} &= \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) q_{n-2} - p_{n-2}(a_n q_{n-1} + q_{n-2})}{q_n q_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}} \end{aligned}$$

Ako je n paran, onda vrijedi $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_n}{q_n}$, a ako je n neparan imamo $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} > \frac{p_n}{q_n}$. □

Dokaz (kombinatorno). Uvedimo oznake P_n i Q_n kao u dokazu prethodnog teorema. Uočimo da je kardinalni broj skupa $P_n \times Q_{n-2}$ jednak $p_n q_{n-2}$, a kardinalni broj skupa $P_{n-2} \times Q_n$ je $p_{n-2} q_n$. Dokaz ovog teorema je sličan dokazu prethodnog. Zamjenom dijelova ploča nakon zadnjeg polja koje ima lom uočavamo korespondenciju elemenata skupova $P_n \times Q_{n-2}$ i $P_{n-2} \times Q_n$ koji imaju barem jedan lom.

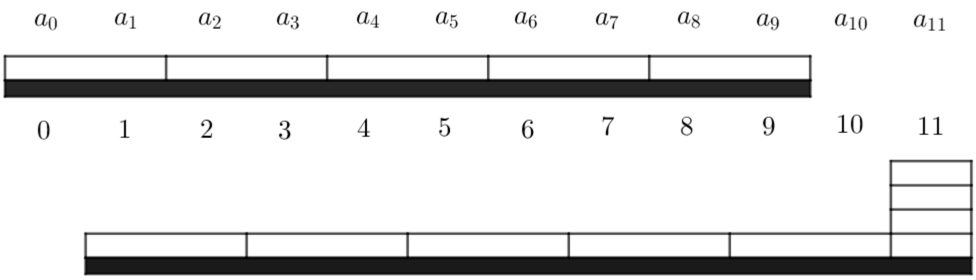


Slika 1.7: Element skupa $P_{11} \times Q_9$ s lomom



Slika 1.8: Prikaz ploča nakon zamjene završetaka

Kada je n neparan broj, ne postoji element skupa $P_n \times Q_{n-2}$ bez loma, a postoji a_n elemenata skupa $P_{n-2} \times Q_n$ bez loma koji se sastoje od naslaganih kvadratnih pločica u n-tom polju i domino pločica u ostalim poljima. Kada je n paran broj, ne postoji element skupa $P_{n-2} \times Q_n$ bez loma, a postoji točno a_n elemenata skupa $P_n \times Q_{n-2}$ bez loma koji se



Slika 1.9: Prikaz popločavanja ploča u kojima nema polja s lomovima

sastoje od naslaganih kvadratnih pločica u n-tom polju i domino pločica u ostalim poljima. Time smo pokazali da vrijedi

$$|P_n \times Q_{n-2}| - |P_{n-2} \times Q_n| = (-1)^n a_n,$$

odnosno

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n.$$

□

Napomena 1.16. *Teoremi 1.13 i 1.15 pokazuju da konvergente teže prema nekom broju jer je niz* $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geqslant 0}$ *Cauchyjev, a samim time i konvergentan u skupu realnih brojeva. Zato ima smisla definirati*

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Propozicija 1.17. *Za* $n \geqslant 0$ *i* $m \geqslant 2$ *vrijedi*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, m] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, m-1, 1].$$

Dokaz (algebarski). Tvrdnja slijedi iz činjenice da je

$$m = m - 1 + \frac{1}{1}.$$

□

Dokaz (kombinatorno). Dokažimo da je $p(a_0, a_1, \ldots, a_n, m) = p(a_0, a_1, \ldots, a_n, m-1, 1)$ jer se analogna tvrdnja za funkcije q pokazuje na isti način, a onda slijedi tvrdnja propozicije.

Popločavanja $(n+2)$-ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_n, m$ su u bijekciji s popločavanjima $(n+3)$-ploče s uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_n, m-1, 1$.

Naime, popločavanju $(n+2)$-ploče koje na zadnjem polju nema m kvadratnih pločica pridružimo popločavanje $(n+3)$-ploče tako da dodamo kvadratnu pločicu na kraj.

Popločavanju $(n+2)$-ploče koje ima točno m kvadratnih pločica na zadnjem polju pridružimo popločavanje $(n+3)$-ploče tako da je na prvih $n+1$ polja isti raspored pločica kao na $(n+2)$-ploči, a zadnja dva polja prekrijemo domino pločicom. $\square$

1.4 Primjeri

U ovom odjeljku dat ćemo razvoje u verižne razlomke za neke nizove racionalnih brojeva. Definirajmo najprije potrebne pojmove.

Definicija 1.18. *Fibonaccijevi brojevi su brojevi za koje vrijedi* $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ *i za svaki* $n \geqslant 2$ *je* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Prvih nekoliko članova niza Fibonaccijevih brojeva su

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

Sada prikažimo kombinatornu interpretaciju Fibonaccijevih brojeva.

Broj načina za popločavanje n-ploče kvadratnim i domino pločicama označimo s f_n.

Slika 1.10: Prikaz popločavanja 4-ploče

Slika 1.10 prikazuje načine popločavanja 4-ploče kvadratnim i domino pločicama. Ovdje nije dopušteno stavljati pločicu na pločicu, čak ni za kvadratne pločice. Stavimo uvjet na prvu pločicu. Ukoliko je prva pločica kvadratna, ostatak ploče može biti popločan na f_{n-1} načina, a ukoliko je prva domino pločica, ostatak ploče može biti popločan na f_{n-2} načina. Time smo pokazali da je ukupan broj načina za popločavanje n-ploče jednak $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Očito je $f_1 = 1$ i $f_2 = 2$.

Definiramo $f_0 = 1$ kao broj načina za popločavanje prazne ploče i uzimamo $f_{-1} = 0$ te tako vidimo da rekurzija vrijedi i za $n = 1, 2$.

Budući da je $f_{-1} = F_0 = 0$ i $f_0 = F_1 = 1$ te da nizovi $(f_n)_{n \geqslant -1}$ i $(F_n)_{n \geqslant 0}$ zadovoljavaju iste rekurzije, zaključujemo da je $f_n = F_{n+1}$ za $n \geqslant -1$. Time smo dobili kombinatornu interpretaciju Fibonaccijevih brojeva.

Idući niz koji ćemo promatrati čine Lucasovi brojevi.

Definicija 1.19. *Lucasovi brojevi L_n su brojevi za koje vrijedi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ i za svaki $n \geqslant 2$ imamo $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.*

Prvih nekoliko Lucasovih brojeva su

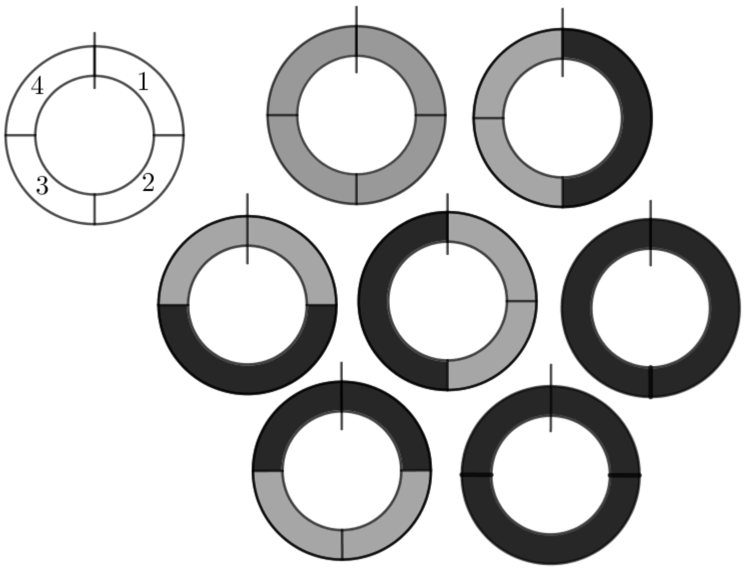
$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$$

Sada prikažimo kombinatornu interpretaciju Lucasovih brojeva.

Označimo s l_n broj načina za popločavanje kružne ploče sastavljene od n označenih polja zakrivljenim kvadratnim i domino pločicama. Primijetimo da postoji više načina za popločavanje kružne ploče nego pravokutne ploče jer sada jedna domino pločica može prekriti polja n i 1.

Definiramo n-ogrlicu kao jedno popločavanje kružne n-ploče. Kažemo da je ogrlica izvan faze kada jedna domino pločica prekriva polja n i 1. U suprotnom kažemo da je ogrlica u fazi.

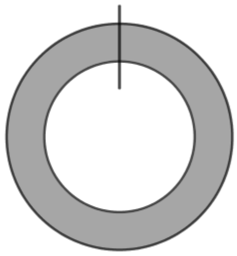
Primjer 1.20. *Prikažimo načine popločavanja kružne 4-ploče.*



Slika 1.11: Popločavanja kružne 4-ploče

Na slici 1.11 vidimo da je prvih pet popločavanja u fazi, a zadnja dva izvan faze. Ukupno ima 7 popločavanja kružne 4-ploče, odnosno $l_4 = 7$.

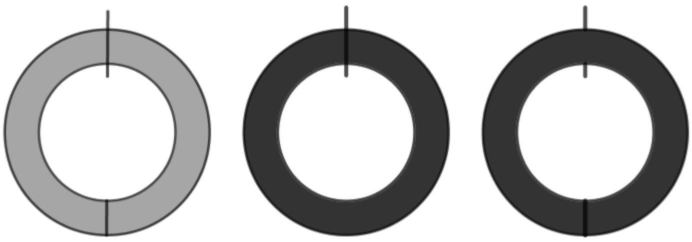
Da bismo popločavanja kružnih ploča povezali s Lucasovim brojevima, pogledajmo popločavanja kružnih ploča s jednim, dva i tri polja.



Slika 1.12: Popločavanje kružne 1-ploče

Na slici 1.12 vidimo da kružna ploča s jednim poljem može biti popločana na samo jedan način (jednom zakrivljenom kvadratnom pločicom). Stoga, $l_1 = 1$.

Kružna 2-ploča može biti popločana na ukupno tri načina. Prvi način je da postavimo dvije kvadratne pločice, a preostala dva načina su da postavimo domino pločicu kao što je prikazano na slici 1.13 (jedno popločavanje je u fazi, a jedno izvan faze). Imamo $l_2 = 3$.



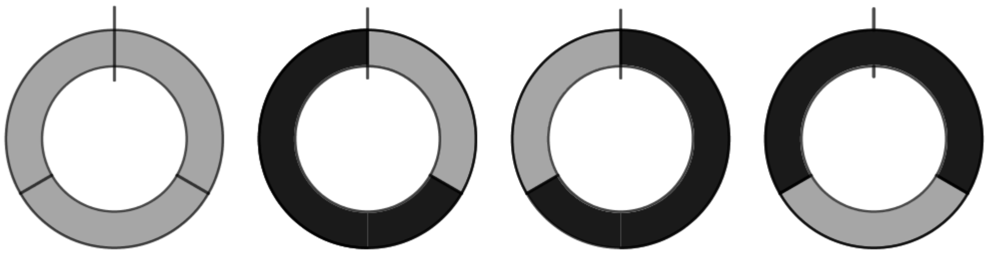
Slika 1.13: Popločavanja kružne 2-ploče

Kružna 3-ploča može biti popločana na ukupno četiri načina. Načine popločavanja vidimo na slici 1.14. Slijedi da je $l_3 = 4$.

Primijetimo da broj popločavanja kružnih ploča podsjeća na niz Lucasovih brojeva. Pokažimo da za $n \geqslant 3$ vrijedi

$$l_n = l_{n-1} + l_{n-2}.$$

Kod popločavanja kružne n-ploče, prva pločica je kvadratna pločica na polju 1 ili domino pločica na poljima 1 i 2 ili domino pločica na poljima n i 1. Nakon toga prekrivamo



Slika 1.14: Popločavanja kružne 3-ploče

iduće polje računajući u smjeru kazaljke na satu i tako dalje. Zadnja pločica je ona koja prethodi prvoj pločici.

Prva pločica određuje je li n-ogrlica u fazi ili izvan faze.

Postoji l_{n-1} popločavanja u kojima je zadnja pločica kvadratna i l_{n-2} popločavanja u kojima je zadnja pločica domino. Uklanjanjem zadnje pločice i zatvaranjem kružne ploče nastaju manje ogrlice.

Definiramo $l_0 = 2$. To znači da postoje dva popločavanja kružne 0-ploče, jedno u fazi i jedno izvan faze. Usporedimo li početne uvjete i rekurzivnu jednadžbu, vidimo da smo dobili kombinatornu interpretaciju Lucasovih brojeva, $l_n = L_n$ za $n \geqslant 0$.

Pogledajmo sada neke razlomke u kojima se pojavljuju Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi. Za sve činjenice dat ćemo kombinatorne dokaze. U dokazima ćemo sa k označavati kvadratne pločice, a sa d domino pločice.

Propozicija 1.21. *Neka je $n \geqslant 0$. Tada vrijedi*

$$[3, 1, 1, \ldots, 1] = \frac{L_{n+2}}{f_n},$$

gdje je $a_0 = 3$ i $a_i = 1$ za sve $0 < i \leqslant n$.

Dokaz. Treba pokazati da je $p_n(3, 1, 1, \ldots, 1) = L_{n+2}$ i $q_n(3, 1, 1, \ldots, 1) = f_n$.

Nazivnik je $q_n(3, 1, 1, \ldots, 1) = p_{n-1}(1, 1, \ldots, 1) = f_n$ po definiciji brojeva f_n.

Brojnik $p_n(3, 1, 1, \ldots, 1)$ je broj popločavanja $(n + 1)$-ploče koja mogu započeti s dominom ili do tri kvadratne pločice naslagane jedna na drugu. Evo kako iz jednog takvog popločavanja T dobijemo $(n + 2)$-ogrlicu, a njih ima L_{n+2}, čime bismo dokazali tvrdnju.

Ako T započinje dominom ili jednom kvadratnom pločicom, neka je kT pridružena $(n+2)$-ogrlica. Ako T započinje s naslagane dvije kvadratne pločice, umjesto te dvije kvadratne pločice stavimo jednu domino pločicu i dobivamo $(n+2)$-ogrlicu koja je u fazi. Ako T počinje s naslagane tri kvadratne pločice, prethodno dobivenu $(n+2)$-ogrlicu rotiramo za jedno polje ulijevo tako da nije u fazi.

Zadano pridruživanje je očito bijektivno. Time smo dokazali početnu tvrdnju. □

Propozicija 1.22. *Neka je $n \geqslant 1$. Tada imamo*

$$[1, 1, \dots, 1, 3] = \frac{L_{n+2}}{L_{n+1}},$$

gdje je $a_n = 3$ i $a_i = 1$ za sve $0 \leqslant i < n$.

Dokaz. Treba pokazati da je $p_n(1, 1, \dots, 3) = L_{n+2}$ i $q_n(1, 1, \dots, 3) = L_{n+1}$.

Brojnik $p_n(1, 1, \dots, 3)$ je broj popločavanja $(n+1)$-ploče koja na zadnjem polju imaju domino pločicu ili do tri kvadratne pločice naslagane jedna na drugu. Iz jednog takvog popločavanja možemo dobiti $(n+2)$-ogrlicu na sličan način kako je opisano u dokazu propozicije 1.21, osim što sada stavljamo uvjet na zadnje polje. Takvih $(n+2)$-ogrlica ima L_{n+2}, čime smo pokazali jednakost $p_n(1, 1, \dots, 3) = L_{n+2}$.

Nazivnik $q_n(1, 1, \dots, 3) = p_{n-1}(1, \dots, 3)$ je broj popločavanja n-ploče koja na zadnjem polju imaju domino pločicu ili do tri kvadratne pločice naslagane jedna na drugu. Dokaz je isti kao i za brojnik, samo što u ovom slučaju imamo jedno polje manje. □

Propozicija 1.23. *Neka je $n \geqslant 1$. Imamo*

$$[4, 4, \dots, 4, 3] = \frac{f_{3n+3}}{f_{3n}},$$

gdje je $a_n = 3$ te $a_i = 4$ za sve $0 \leqslant i < n$.

Dokaz. Trebamo pokazati da vrijedi $p_n(4, 4, \dots, 4, 3) = f_{3n+3}$ i $q_n(4, 4, \dots, 4, 3) = f_{3n}$.

Pokažimo najprije jednakost nazivnika.

Nazivnik $q_n(4, 4, \dots, 4, 3)$ je broj popločavanja n-ploče u kojima se na svako polje mogu složiti do četiri kvadratne pločice jedna na drugu, osim zadnjeg polja na koje se mogu složiti najviše tri kvadratne pločice.

Iz takvog popločavanja T možemo dobiti obično popločavanje U gdje nije dopušteno slaganje pločica jedne na drugu, tako da svaku pločicu utrostručimo te dobijemo popločavanje $3n$-ploče. Ako i-to polje u popločavanju T sadrži jednu, dvije ili tri kvadratne pločice, onda će popločavanje U imati lom na polju $3i$. Ako popločavanje T sadrži četiri kvadratne pločice na i-tom polju, onda popločavanje U neće imati lom na polju $3i$. Ukoliko popločavanje T na i-tom polju ima dominu, tada će U imati lom na polju $3i$ ako i samo ako domina završava na polju i.

Pretpostavimo da za neki $j \geqslant 0$, T počinje sa j skupina kvadratnih pločica visine 4 te iza toga slijedi kvadratna pločica visine 1. To ćemo označavati $4^j 1$. Neka k označava kvadratnu pločicu, a d domino pločicu. Tada U počinje sa $k^2(dk)^j k$ i ne postoji lom na poljima $3, 6, 9, \dots, 3j$, ali postoji na polju $3(j+1)$. Slično, $4^j 2$ proizvodi $d(dk)^j k$, dok $4^k 3$ proizvodi $k(kd)^j d$. Konačno, $4^j d$ proizvodi $d(dk)^j d^2$ koje nema lom na poljima $3, 6, \dots, 3j + 3$, ali ima lom na polju $3j + 6$. Nastavimo transformirati T na taj način.

Takvih popločavanja ima ukupno f_{3n}, čime smo riješili nazivnik, a onda je jasan i identitet za brojnik. □

Propozicija 1.24. *Neka je $n \geqslant 1$. Tada vrijedi*

$$[4, 4, \dots, 4, 5] = \frac{f_{3n+4}}{f_{3n+1}},$$

gdje je $a_n = 5$ i $a_i = 4$ za sve $0 \leqslant i < n$.

Dokaz. Dokaz se provodi slično dokazu propozicije 1.23, osim što zadnji niz $4^j x$ u T (gdje x može biti $1, 2, 3, 4$ ili d) dodaje jednu kvadratnu pločicu više na kraj (ako je x jednak $1, 2, 3$ ili d) te $4^j 4$ proizvodi $k^2(dk)^j d$, dok $4^j 5$ proizvodi $d(dk)^j d$. □

Propozicija 1.25. *Neka je $n \geqslant 1$. Tada imamo*

$$[2, 4, \dots, 4, 3] = \frac{L_{3n+1}}{f_{3n}},$$

gdje je $a_0 = 2$, $a_n = 3$ i $a_i = 4$ za sve $0 < i < n$.

Dokaz. Jednakost nazivnika se pokaže analogno dokazu propozicije 1.23.

Sa T označimo popločavanje $(n + 1)$-ploče s uvjetima visina $2, 4, \dots, 4, 3$ i stavimo uvjet na prvu pločicu. T je oblika $1T'$ (jedna kvadratna pločica nakon koje slijedi T'), $2T'$ (dvije naslagane kvadratne pločice nakon kojih slijedi T') ili dT'' (domino pločica nakon koje slijedi T''), gdje prema propoziciji 1.23 T' i T'' možemo promatrati kao već opisana obična popločavanja $(3n)$-ploče ili $(3n - 3)$-ploče. Sada $1T'$ možemo pretvoriti u $(3n + 1)$-ogrlicu koja započinje kvadratnom pločicom. Ako T' počinje kvadratnom pločicom, onda $2T'$ postaje $(3n + 1)$-ogrlica u fazi koja započinje dominom. Ako T' započinje dominom, onda $2T'$ postaje $(3n + 1)$-ogrlica izvan faze koja počinje s dk. Ako T započinje dominom, tada dT'' postaje $(3n + 1)$-ogrlica izvan faze koja započinje s dvije domino pločice. □

Propozicija 1.26. *Neka je $n \geqslant 1$. Tada vrijedi*

$$[2, 4, \dots, 4, 5] = \frac{L_{3n+2}}{f_{3n+1}},$$

gdje je $a_0 = 2$, $a_n = 5$ i $a_i = 4$ za sve $0 < i < n$.

Dokaz. Dokaz se provodi primjenom postupka iz dokaza propozicije 1.25 na dokaz propozicije 1.24. □

1.5 Kontinuante i prosti brojevi oblika 4k+1

Kontinuanta je naziv za brojnik verižnog razlomka $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, to jest $p(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Kako smo dokazali u teoremu 1.10, vrijedi

$$p(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_n p(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + p(a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}).$$

Vrijedi i općenitija tvrdnja.

Teorem 1.27. *Za* $n \geqslant 1$ *i* $0 \leqslant l \leqslant n-1$ *je*

$$p(a_0, \ldots, a_n) = p(a_0, \ldots, a_l) p(a_{l+1}, \ldots, a_n) + p(a_0, \ldots, a_{l-1}) p(a_{l+2}, \ldots, a_n). \tag{1.2}$$

Dokaz. S lijeve strane je broj popločavanja $(n+1)$-ploče s uvjetima visina $a_0, \ldots, a_n$. S desne strane, prvi pribrojnik broji popločavanja koja nemaju domino pločicu koja prekriva polja l i $l+1$, dok drugi pribrojnik broji popločavanja koja ju imaju. □

Primijetimo da za sve prirodne brojeve $a_0, \ldots, a_n$ vrijedi

$$p(a_n, \ldots, a_0) = p(a_0, \ldots, a_n), \tag{1.3}$$

što smo i dokazali u teoremu 1.11.

Ako je $[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ je do kraja skraćen, slijedi $p_n = p(a_0, \ldots, a_n)$ i $q_n = p(a_1, \ldots, a_n)$, gdje smo za drugu jednakost koristili (1.1).

Sada pretpostavimo da je p prost broj oblika $4k+1$. Promotrimo razvoj u verižne razlomke brojeva $p/1, p/2, \ldots, p/(2k)$.

Za svaki j između 1 i $2k$ je $p/j > 2$ do kraja skraćeni razlomak. Dakle, $p/j = [a_0, \ldots, a_n]$, pri čemu su $a_0 \geqslant 2$ i $a_n \geqslant 2$. Zaključujemo da vrijedi

$$p = p(a_0, \ldots, a_n) = p(a_n, \ldots, a_0).$$

Stoga $[a_n, \ldots, a_0]$ također ima brojnik p i zbog $a_n \geqslant 2$ vrijedi $[a_n, \ldots, a_0] = p/i$, za neki $1 \leqslant i \leqslant 2k$. Dakle, svaki razlomak p/j možemo spariti s „obratnim” razlomkom p/i.

Primijetimo da je $p/1 = [p]$ palindromski verižni razlomak jer je jednak svom obratu. Budući da je $2k$ paran broj, postoji još barem jedan razlomak p/j^* koji je sparen sa samim sobom, pa je zato palindromski. Dakle, za neki $2 \leqslant j^* \leqslant 2k$ vrijedi

$$[a_0, \ldots, a_{n^*}] = \frac{p}{j^*} = [a_{n^*}, \ldots, a_0].$$

Primjerice, za $p = 5$ su

$$\frac{5}{1} = [5] \quad \text{i} \quad \frac{5}{2} = [2, 2]$$

oba palindromski razlomci.

Za $p = 13$ je

$$\frac{13}{1} = [13], \quad \frac{13}{2} = [6, 2], \quad \frac{13}{3} = [4, 3], \quad \frac{13}{4} = [3, 4], \quad \frac{13}{5} = [2, 1, 1, 2], \quad \frac{13}{6} = [2, 6].$$

Od navedenih razlomaka, $13/1$ i $13/5$ su palindromski.

Tvrdimo da je n^* neparan broj. Pretpostavimo suprotno, neka je n^* paran broj, tj. oblika $n^* = 2l$ za neki $l \geqslant 1$.

Tada je $p/j^* = [a_0, \ldots, a_{l-1}, a_l, a_{l-1}, \ldots, a_0]$. Prema formulama (1.2) i (1.3) je

$$\begin{aligned} p &= p(a_0, \ldots, a_{l-1}, a_l, a_{l-1}, \ldots, a_0) \\ &= p(a_0, \ldots, a_l)p(a_{l-1}, \ldots, a_0) + p(a_0, \ldots, a_{l-1})p(a_{l-2}, \ldots, a_0) \\ &= p(a_0, \ldots, a_l)[p(a_0, \ldots, a_{l-1}) + p(a_0, \ldots, a_{l-2})]. \end{aligned}$$

Iz navedenog slijedi da je p složen broj jer je prikazan kao umnožak dvaju brojeva koji su veći ili jednaki 2 budući da je $a_0 \geqslant 2$. Dolazimo do kontradikcije, pa zaključujemo da je n^* neparan broj.

Dakle, $n^* = 2l + 1$ za neki $l \geqslant 0$. Imamo

$$\frac{p}{j^*} = [a_0, \ldots, a_l, a_l, \ldots, a_0].$$

Stoga je

$$\begin{aligned} p &= p(a_0, \ldots, a_l, a_l, \ldots, a_0) \\ &= p(a_0, \ldots, a_l)p(a_l, \ldots, a_0) + p(a_0, \ldots, a_{l-1})p(a_{l-1}, \ldots, a_0) \\ &= (p(a_0, \ldots, a_l))^2 + (p(a_0, \ldots, a_{l-1}))^2. \end{aligned}$$

Dakle, p smo zapisali kao sumu kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Za $p = 13$ imamo palindromski razlomak $13/5$ te slijedi

$$13 = p(2, 1, 1, 2) = p(2, 1)p(1, 2) + p(2)p(2) = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 3^2 + 2^2.$$

Sada možemo dokazati jedinstvenost prikaza prostog broja kao sume kvadrata. Ako je $[a_0, \ldots, a_n] = p_n/q_n$ do kraja skraćen razlomak, onda za $n \geqslant 2$ vrijedi

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1},$$

kao što smo dokazali u teoremu 1.13. Stoga, za $n \geqslant 2$ imamo

$$p(a_0, \ldots, a_n)p(a_1, \ldots, a_{n-1}) - p(a_0, \ldots, a_{n-1})p(a_1, \ldots, a_n) = (-1)^{n-1}. \tag{1.4}$$

Da bismo dokazali jedinstvenost prikaza, najprije pretpostavimo da postoje dva različita prikaza broja p kao sume kvadrata. Neka je $p = r^2 + s^2$ i $p = u^2 + v^2$ za prirodne brojeve $r > s$ i $u > v$.

Budući da je p prost broj, vrijedi $\mathrm{nzd}(r, s) = \mathrm{nzd}(u, v) = 1$. Zato su r/s i u/v skraćeni razlomci i postoje jedinstveni prirodni brojevi $r_0, \ldots, r_t$ i $u_0, \ldots, u_w$ takvi da je $r/s = [r_0, \ldots, r_t]$ i $u/v = [u_0, \ldots, u_w]$, gdje je $r_t \geqslant 2$ i $u_w \geqslant 2$.

Slijedi
$$\frac{r}{s} = \frac{p(r_0, \ldots, r_t)}{p(r_1, \ldots, r_t)}.$$
Koristeći jednakosti (1.2) i (1.3), dobivamo
$$\begin{aligned} p &= r^2 + s^2 \\ &= p(r_t, \ldots, r_0)p(r_0, \ldots, r_t) + p(r_t, \ldots, r_1)p(r_1, \ldots, r_t) \\ &= p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t). \end{aligned}$$
Sada označimo $x = p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_{t-1})$. Tada je prema osnovnoj rekurziji iz teorema 1.10,
$$\begin{aligned} p &= p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t) \\ &= xr_t + p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_{t-2}) \geqslant 2x + 1. \end{aligned}$$
Stoga je $2 \leqslant x \leqslant (p-1)/2$.

Koristeći jednakost (1.4) imamo
$$p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t)p(r_{t-1}, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_{t-1}) - p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_{t-1})p(r_{t-1}, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t)$$
$$= (-1)^{2t} = 1.$$
Slijedi
$$p \cdot p(r_{t-1}, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_{t-1}) - x^2 = 1$$
pa zaključujemo da x zadovoljava $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Analogno, iz
$$\frac{u}{v} = \frac{p(u_0, \ldots, u_w)}{p(u_1, \ldots, u_w)}$$
dobivamo da je $p = p(u_w, \ldots, u_0, u_0, \ldots, u_w)$. Označimo $y = p(u_w, \ldots, u_0, u_0, \ldots, u_{w-1})$. Tada y zadovoljava $2 \leqslant y \leqslant (p-1)/2$ i $y^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Imamo $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, pa p dijeli $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$. S obzirom na to da je p prost broj, slijedi $x \equiv y$ ili $x \equiv -y \pmod{p}$. Također, x i y su između 2 i $(p-1)/2$, pa mora vrijediti $x = y$. Zato je
$$\begin{aligned} [r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t] &= \frac{p(r_t, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t)}{p(r_{t-1}, \ldots, r_0, r_0, \ldots, r_t)} = \frac{p}{x} \\ &= \frac{p}{y} = \frac{p(u_w, \ldots, u_0, u_0, \ldots, u_w)}{p(u_{w-1}, \ldots, u_0, u_0, \ldots, u_w)} = [u_w, \ldots, u_0, u_0, \ldots, u_w]. \end{aligned}$$

Budući da je razvoj u verižni razlomak uz uvjete $r_t \geqslant 2$ i $u_w \geqslant 2$ jedinstven, slijedi da je $t = w$ i $r_i = u_i$ za sve $0 \leqslant i \leqslant t$. Dakle,

$$\frac{r}{s} = [r_0, \ldots, r_t] = [u_0, \ldots, u_w] = \frac{u}{v}.$$

Zaključujemo da je $r = u$ i $s = v$.

Teorem 1.28. *Svaki prost broj oblika* $4k + 1$ *može se prikazati kao suma kvadrata dva prirodna broja i takav prikaz je jedinstven do na poredak pribrojnika.*

Poglavlje 2

Složeni verižni razlomci

2.1 Definicija i kombinatorna interpretacija složenih verižnih razlomaka

Definicija 2.1. *Neka su dani konačni nizovi prirodnih brojeva* $(a_i)_{i=0}^n, (b_i)_{i=1}^n$. *Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

nazivamo konačni složeni verižni razlomak. Gore navedeni konačni složeni verižni razlomak označavamo s $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \dots, (b_n, a_n)]$.

Primjer 2.2.

$$[3, (4, 5), (2, 7)] = 3 + \frac{4}{5 + \frac{2}{7}} = \frac{139}{37}$$

Definicija 2.3. *Neka su dani beskonačni nizovi prirodnih brojeva* $(a_i)_{i \geqslant 0}$ *i* $(b_i)_{i \geqslant 1}$. *Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{\ddots}}}$$

nazivamo beskonačni složeni verižni razlomak. Za beskonačni složeni verižni razlomak koristimo oznaku $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \dots]$.

Kao i u prethodnom poglavlju označimo s $(p_i)_{i\geqslant 0}$ i $(q_i)_{i\geqslant 0}$ familije funkcija koje daju brojnik i nazivnik konačnog verižnog razlomka. Kod konačnih jednostavnih verižnih razlomaka rezultat izračunavanja „odozdo prema gore" je uvijek bio skraćen razlomak, dok to kod složenih verižnih razlomaka ne mora uvijek vrijediti.

Radi jednostavnosti zapisa u nastavku rada ćemo, kao i u prethodnom poglavlju, izostaviti indeks u zapisu funkcija.

Primjer 2.4.

$$[5,(2,4)] = 5 + \frac{2}{4} = \frac{22}{4}$$

Imamo $p[5,(2,4)] = 22$ *i* $q[5,(2,4)] = 4$.

Funkcije p i q također zadovoljavaju početne uvjete: $p[a] = a$ i $q[a] = 1$. Za $n \geqslant 1$ vrijedi

$$\begin{aligned}[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)] &= a_0 + \frac{b_1}{[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]}\\ &= a_0 + \frac{b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]}{p[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]}\\ &= \frac{a_0 p[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)] + b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]}{p[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]}.\end{aligned}$$

Zaključujemo

$$\begin{aligned}p[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)] &= a_0 p[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)] + b_1 q[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)]\\ q[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)] &= p[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)].\end{aligned}$$

Sada povežimo konačne složene verižne razlomke s idejom popločavanja. U ovom slučaju uzimamo da je dopušteno postavljati domino pločicu iznad domino pločice, isto kao što se i kvadratne pločice mogu postaviti jedna na drugu, no nije dopušteno stavljati pločice različitih tipova jednu na drugu.

Za $i \geqslant 1$ postavimo uvjete visina $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tako da u $i-1$-om i i-tom polju možemo postaviti najviše b_i domino pločica. Neka $P[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)]$ označava broj načina za popločavanje $(n+1)$-ploče s poljima $0, 1, \ldots, n$ i uvjetima visina $a_0, a_1, \ldots, a_n$ za kvadratne i $b_1, \ldots, b_n$ za domino pločice. Neka Q_n označava broj popločavanja ploče nakon uklanjanja nultog polja (zajedno s uvjetima visina a_0 i b_1). Tada slijedi $P[a] = a$ i $Q[a] = 1$ te za $n \geqslant 1$ imamo

$$Q[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)] = P[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)].$$

Razlikujući popločavanja ovisno o tome koja pločica pokriva nulto polje, dobivamo slično kao i prije

$$P[a_0,(b_1,a_1),\ldots,(b_n,a_n)] = a_0 P[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)] + b_1 Q[a_1,(b_2,a_2),\ldots,(b_n,a_n)].$$

Uspoređujući početne uvjete i rekurzivne jednadžbe koje zadovoljavaju funkcije p i P, odnosno q i Q zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.5. *Neka je $(a_i)_{i\geqslant 0}$ niz prirodnih brojeva. Neka je za $n \geqslant 1$ gore definirani verižni razlomak $[a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)]$ jednak razlomku $\frac{p_n}{q_n}$ dobivenom bez skraćivanja. Tada je za $n \geqslant 0$, p_n broj načina za popločavanje $(n+1)$-ploče s uvjetima visina $a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)$ i q_n broj načina za popločavanje n-ploče s uvjetima visina $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)$.*

Primjer 2.6. *Prikažimo kombinatornu interpretaciju racionalne aproksimacije broja e. Prikaz broja e preko verižnog razlomka je*

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \ddots}}}}}.$$

U ovom slučaju, za kombinatorni prikaz ćemo koristiti samo početni dio ovog verižnog razlomka, odnosno

$$[2, (1, 1), (1, 2), (2, 3)] = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}}} = \frac{30}{11} = 2.727272\ldots$$

Izračunajmo broj mogućih popločavanja 4-ploče s uvjetima visina $2, 1, 2, 3$ za kvadratne i $1, 1, 2$ za domino pločice. Ukoliko sva polja prekrijemo kvadratnim pločicama imamo $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ takvih popločavanja. Ako u prva dva polja složimo kvadratne pločice, a u preostala dva domino pločice imamo $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ takva popločavanja. Prekrijemo li prva dva polja domino pločicama, a preostala dva kvadratnim pločicama dobivamo $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ takvih popločavanja. Ukoliko u nulto i zadnje polje postavimo samo kvadratne pločice, a u prvo i drugo domino pločicu imamo $2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$ popločavanja. Preostaje još slučaj kada bismo sva polja prekrili samo domino pločicama i tada bismo imali $1 \cdot 2 = 2$ takva popločavanja.

Zaključujemo da je ukupan broj popločavanja 4-ploče s uvjetima visina $2, 1, 2, 3$ za kvadratne i $1, 1, 2$ za domino pločice jednak $12 + 4 + 6 + 6 + 2 = 30$.

Sada izračunajmo broj mogućih popločavanja 3-ploče s uvjetima visina $1, 2, 3$ za kvadratne i $1, 2$ za domino pločice. Prekrijemo li sva polja kvadratnim pločicama imat ćemo

$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ *takvih popločavanja. Ukoliko u nulto polje postavimo kvadratne pločice, a u preostala dva polja domino, imat ćemo* $1 \cdot 2 = 2$ *takva popločavanja. Ako u prva dva polja postavimo domino, a u jedino preostalo polje kvadratne pločice dobit ćemo* $1 \cdot 3 = 3$ *takva popločavanja. Ukupno imamo* $6 + 2 + 3 = 11$ *mogućih popločavanja* 3*-ploče s uvjetima visina* $1, 2, 3$ *za kvadratne i* $1, 2$ *za domino pločice. Dakle,* $p[2, (1, 1), (1, 2), (2, 3)] = 30$, $q[2, (1, 1), (1, 2), (2, 3)] = 11$.

2.2 Kombinatorni dokazi nekih teorema

Teorem 2.7. *Neka su dani nizovi prirodnih brojeva* $(a_i)_{i\geqslant 0}$ *i* $(b_i)_{i\geqslant 1}$*. Neka je za* $n \geqslant 0$, $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)] = \frac{p_n}{q_n}$*. Tada* p_n *i* q_n *zadovoljavaju rekurzije*

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_0 a_1 + b_1, & p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}, \end{aligned}$$

za $n \geqslant 2$.

Dokaz (kombinatorno). Dokaz ovog teorema je analogan dokazu teorema 1.10. U prethodnom poglavlju smo kombinatorno pokazali da vrijedi $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ i $q_1 = a_1$, a lako se pokaže i $p_1 = a_0 a_1 + b_1$.

Za dokaz tvrdnje $p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ za $n \geqslant 2$, stavimo uvjet na zadnje polje prilikom popločavanja $(n + 1)$-ploče s uvjetima visina $a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)$. Postoji a_n načina za popločavanje završetka kvadratnom pločicom, a prethodni dio ploče može biti popločan na p_{n-1} načina. Postoji b_n načina za popločavanje završetka domino pločicom, a prethodni dio ploče može biti popločan na p_{n-2} načina. Dakle, ukupno imamo $a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$ takvih popločavanja. Time smo pokazali da vrijedi

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}.$$

Dokaz tvrdnje $q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$ provodi se analogno gledajući popločavanja n-ploče s uvjetima visina $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)$ u ovisnosti o popločavanju zadnjeg polja. □

Teorem 2.8. *Razlika između uzastopnih konvergenti* $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)]$ *konačnog ili beskonačnog verižnog razlomka* $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots]$ *je*

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} b_i}{q_n q_{n-1}},$$

gdje je $n \geqslant 1$*. Nakon množenja obje strane jednakosti s* $q_n q_{n-1}$ *imamo ekvivalentnu tvrdnju*

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

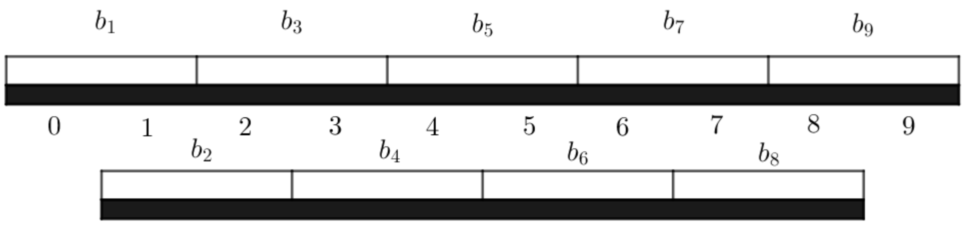
Dokaz (kombinatorno). Označimo s $P_n \times Q_{n-1}$ skup svih popločavanja dviju ploča pri čemu gornja ploča sadrži polja $0, 1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ za kvadratne i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ za domino pločice, a donja ploča sadrži polja $1, 2, \ldots, n-1$ s uvjetima visina $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ za kvadratne i $b_2, \ldots, b_{n-1}$ za domino pločice.

Na sličan način označimo s $P_{n-1} \times Q_n$ skup svih popločavanja dviju ploča pri čemu gornja ploča sadrži polja $0, 1, 2, \ldots, n-1$ s uvjetima visina $a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots, (b_{n-1}, a_{n-1})$, a donja ploča ima polja $1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)$.

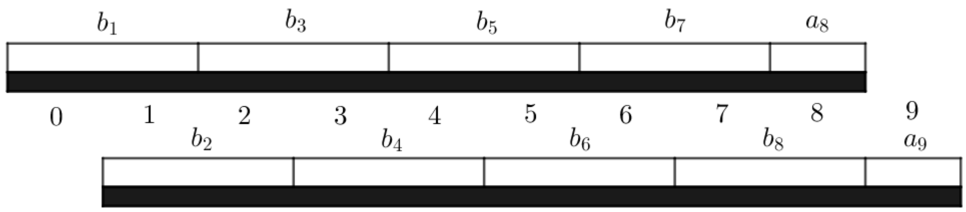
Kao i u prethodnom poglavlju zaključujemo da je kardinalni broj skupa $P_n \times Q_{n-1}$ jednak $p_n q_{n-1}$ te da je kardinalni broj skupa $P_{n-1} \times Q_n$ jednak $p_{n-1} q_n$. Također označimo sa S i T popločavanja spomenutih ploča. Ako barem jedno od popločavanja, S i T, sadrži kvadratnu pločicu, (S, T) će u nekom polju imati lom.

Ukoliko je n neparan broj, postoji $\prod_{i=1}^{n} b_i$ elemenata skupa $P_n \times Q_{n-1}$ bez loma i ne postoji element skupa $P_{n-1} \times Q_n$ bez loma jer za sve $(A, B) \in P_{n-1} \times Q_n$, A i B prekrivaju neparan broj polja pa sadrže kvadratnu pločicu.

Ako je n paran broj, ne postoji element skupa $P_n \times Q_{n-1}$ bez loma i postoji $\prod_{i=1}^{n} b_i$ elemenata skupa $P_{n-1} \times Q_n$ bez loma.

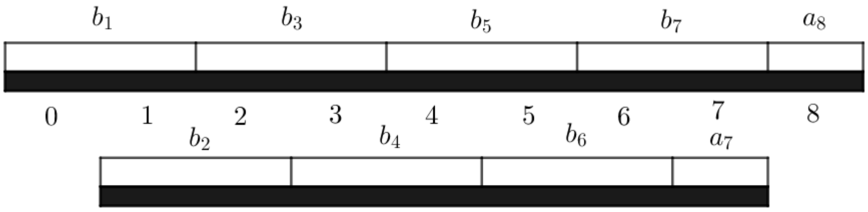


Slika 2.1: Prikaz elementa skupa $P_n \times Q_{n-1}$ bez loma za slučaj kada je n neparan ($n = 9$)

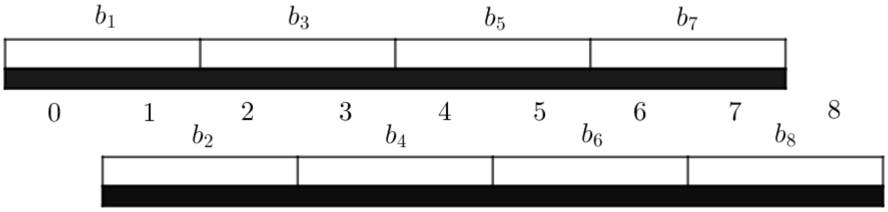


Slika 2.2: Prikaz elementa skupa $P_{n-1} \times Q_n$ s lomom za slučaj kada je n neparan ($n = 9$)

Neka je $(S, T) \in P_n \times Q_{n-1}$ koji ima lom. Ako zamijenimo dijelove popločavanja S i T nakon zadnjeg loma, dobit ćemo $(S', T') \in P_{n-1} \times Q_n$ koji ima lom na istom mjestu kao i



Slika 2.3: Prikaz elementa skupa $P_n \times Q_{n-1}$ s lomom za slučaj kada je n paran ($n = 8$)



Slika 2.4: Prikaz elementa skupa $P_{n-1} \times Q_n$ bez loma za slučaj kada je n paran ($n = 8$)

(S, T). Na taj način imamo bijekciju elemenata skupova $P_n \times Q_{n-1}$ i $P_{n-1} \times Q_n$ koji imaju lom. Zaključujemo,

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = |P_n \times Q_{n-1}| - |P_{n-1} \times Q_n| = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

□

Teorem 2.9. *Neka je za $n \geqslant 2$ s $\frac{p_n}{q_n}$ označena n-ta konvergenta od $[a_0, (b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots]$. Tada vrijedi*

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i.$$

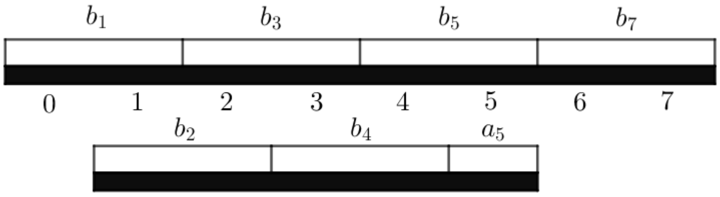
Dokaz (kombinatorno). Označimo s $P_n \times Q_{n-2}$ skup svih popločavanja dviju ploča, gdje gornja ploča sadrži polja $0, 1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_n, a_n)$, a donja ploča sadrži polja $1, 2, \ldots, n-2$ s uvjetima visina $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_{n-2}, a_{n-2})$.

Na sličan način označimo s $P_{n-2} \times Q_n$ skup svih popločavanja pri čemu gornja ploča ima polja $0, 1, 2, \ldots, n-2$ s uvjetima visina $a_0, (b_1, a_1), \ldots, (b_{n-2}, a_{n-2})$, a donja ploča sadrži polja $1, 2, \ldots, n$ s uvjetima visina $a_1, (b_2, a_2), \ldots, (b_n, a_n)$.

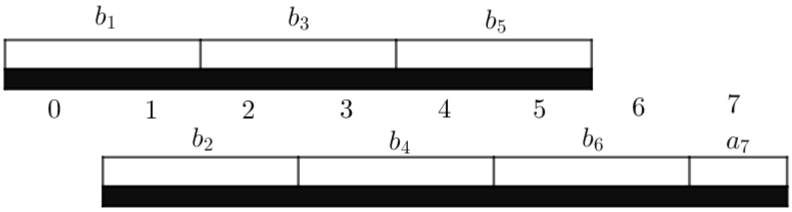
Kao u dokazu prethodnog teorema, imamo $|P_n \times Q_{n-2}| = p_n q_{n-2}$ i $|P_{n-2} \times Q_n| = p_{n-2} q_n$.

Ako je n neparan, ne postoji element skupa $P_n \times Q_{n-2}$ bez loma i postoji $a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i$ elemenata skupa $P_{n-2} \times Q_n$ bez loma.

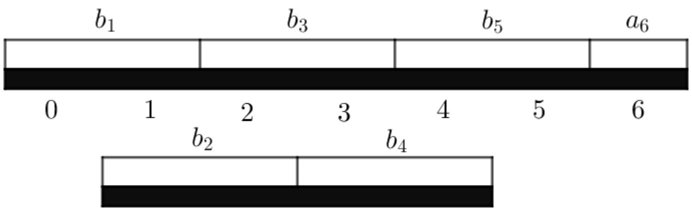
Ako je n paran, postoji $a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i$ elemenata skupa $P_n \times Q_{n-2}$ bez loma i ne postoji element skupa $P_{n-2} \times Q_n$ bez loma.



Slika 2.5: Prikaz elementa skupa $P_n \times Q_{n-2}$ s lomom za slučaj kada je n neparan ($n = 7$)



Slika 2.6: Prikaz elementa skupa $P_{n-2} \times Q_n$ bez loma za slučaj kada je n neparan ($n = 7$)

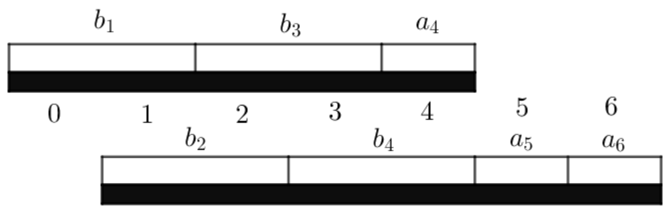


Slika 2.7: Prikaz elementa skupa $P_n \times Q_{n-2}$ bez loma za slučaj kada je n paran ($n = 6$)

Uspostavljajući bijekciju analognu onima u prethodnim dokazima dobivamo

$$p_n q_{n-2} - p_{n-2} q_n = |P_n \times Q_{n-2}| - |P_{n-2} \times Q_n| = (-1)^n a_n \prod_{i=1}^{n-1} b_i.$$

□



Slika 2.8: Prikaz elementa skupa $P_{n-2} \times Q_n$ s lomom za slučaj kada je n paran ($n = 6$)

2.3 Linearne rekurzije višeg reda

Kombinatorni pristup rekurzijama drugog reda koje se pojavljuju kod Fibonaccijevog i Lucasovog niza te jednostavnih i složenih verižnih razlomaka, može se generalizirati na općenite homogene linearne rekurzivne jednadžbe s konstantnim koeficijentima.

Za početne vrijednosti $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ i linearnu rekurziju k-tog reda

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} \quad (\text{za } n \geqslant k),$$

popločavamo n-ploču s pločicama duljina $1, 2, \ldots, k$.

Početnoj pločici duljine i pridružimo težinu $p_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_j a_{i-j}$, a iza toga svakoj pločici duljine j pridružimo težinu c_j, gdje je $1 \leqslant j \leqslant k$. Težinu popločavanja n-ploče definiramo kao umnožak težina pojedinih pločica popločavanja. Primjerice, popločavanje 13-ploče oblika tromino - kvadratić - domino - domino - kvadratić - tromino - kvadratić ima težinu $p_3(c_1)^3(c_2)^2c_3$.

Sada se pokazuje da je za $n \geqslant 1$, a_n suma težina svih dopuštenih popločavanja n-ploče. Primijetimo da je u ovakvoj interpretaciji moguće uzeti da su c_i-ovi i a_i-ovi kompleksni brojevi.

Bibliografija

[1] B. Balof, H. Jenne, *Tilings, continued fractions, derangements, scramblings and e*, Journal of Integer Sequences, Vol. 17 (2014), 11 pp.

[2] A. T. Benjamin, J. J. Quinn, *Proofs that really count: The art of combinatorial proof*, MAA, 2003.

[3] A. T. Benjamin, D. Zeilberger, *Pythagorean primes and palindromic continued fractions*, INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 5 (2005), 5 pp.

[4] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva (skripta)*, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2006.

[5] C. D. Olds, *Continued fractions*, Random House, 1963.

[6] O. Panprasitwech, *Combinatorial proofs of some identities for nonregular continued fractions*, International Journal of Combinatorics (2012), 6 pp.

Sažetak

Tema ovog diplomskog rada je jedna kombinatorna interpretacija verižnih razlomaka.

U prvom poglavlju definirani su jednostavni verižni razlomci i opisana su neka njihova svojstva. Uvodi se ideja popločavanja $n \times 1$ ploče domino i kvadratnim pločicama i pokazuje veza između takvih popločavanja i brojnika, odnosno nazivnika konvergenti jednostavnih verižnih razlomaka. Zatim su tvrdnje vezane uz verižne razlomke dokazane koristeći spomenutu kombinatornu interpretaciju, a u više slučajeva je usporedno dan i algebarski dokaz istih tvrdnji. Kombinatornom metodom obrađene su i neke familije verižnih razlomaka gdje se kao vrijednosti pojavljuju razlomci s Fibonaccijevim ili Lucasovim brojevima.

U drugom poglavlju je opisana kombinatorna interpretacija složenih verižnih razlomaka te su dokazani analogoni nekih tvrdnji koje su pokazane za jednostavne verižne razlomke.

Summary

The topic of this graduation thesis is one combinatorial interpretation of continued fractions.

In the first chapter simple continued fractions are defined and some of their properties are described. The idea of tiling $n \times 1$ board by square and domino tiles is introduced and a connection between such tilings and numerators or denominators of convergents to simple continued fractions is established. Some results on continued fractions are proved using this combinatorial interpretation and in several cases algebraic proof of the same statements is given for comparison. Some families of continued fractions where values are rational numbers in which Fibonacci or Lucas numbers appear are also treated using the combinatorial method.

In the second chapter the combinatorial interpretation is generalized to nonsimple continued fractions and some statements already proved in the case of simple continued fractions are proved for these more general continued fractions.

Životopis

Rođena sam 24. ožujka 1992. godine u Zadru. Pohađala sam Osnovnu školu Smiljevac te nakon toga 2006. godine u Zadru upisujem Gimnaziju Vladimira Nazora, opći smjer. Po završetku gimnazije i uspješno položene državne mature 2010. godine, upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Iduće godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematike, nastavnički smjer na istom fakultetu. Godine 2015. završavam preddiplomski studij te iste godine nastavljam svoje školovanje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu upisom diplomskog sveučilišnog studija matematike, nastavnički smjer.